数理解析研究所講究録
757巻 1991年 133-164

A remark on analytic hypoellipticity for operators with symplectic characteristics

T. Sakurai (Saitama Univ.)
桜井 力 (埼玉大・理)

It is well known (Grusin [2]) that the operator

$$P(\lambda) = \sum_{j=1}^{N-1}(D_j^2 + x_j^2D_N^2) - \lambda D_N \quad (D_j=-i\partial_{x_j})$$

is analytic hypoelliptic at $(0,dx_N)$ if and only if

$$(*) \qquad \lambda \notin \{2j+N-1;\ j=0,1,2,\cdots\} = \mathrm{spec}(-\Delta'+|x'|^2).$$

Under a suitable subellipticity condition, similar to above, analytic hypoellipticity has been proved in a satisfactorily generalized form for operators with symplectic characteristics. (see e.g. Metivier [6], Ōkaji [7].)

However, in respect to necessity of $(*)$, Stein [8] showed that $P(N-1) + d$ $(d\neq 0)$ is also analytic hypoelliptic. This result has been generalized by Grigis-Rothschild [1] to operators of the form:

$$P = \sum_{|\alpha+\beta|\le m} C_{\alpha\beta}(D_y)t^{\alpha}D_t^{\beta}, \quad (t,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^n,\ C_{\alpha\beta}\in S^{\mu+(|\alpha|-|\beta|)/2},$$

with $\mathrm{Char}(P) = \{t=\tau=0\}$ and not being subelliptic at $(0,\mathring{\eta}dy)$. More precisely, they proved that

$$\exists\ H:(\mathcal{G}'_y)^{k_1} \longrightarrow \mathcal{G}'_{t,y}$$

with $WF'_{\mathcal{A}}(H)$ inducing the isomorphism: $\dot{T}^*(\mathbb{R}^n_y) \longrightarrow \mathrm{Char}(A) \subset \dot{T}^*(\mathbb{R}^{d+n}_{t,y})$,

$$\exists\ M = M(D_y) \sim \sum_{j=0}^{\infty} |D|^{-j/2} M_j\left(\frac{D}{|D|}\right) : (\mathcal{G}'_y)^{k_1} \longrightarrow (\mathcal{G}'_y)^{k_2},$$

where $\begin{matrix} k_1 \\ (k_2) \end{matrix} = \dim \left(\begin{matrix} \mathrm{Ker} \\ (\mathrm{Coker}) \end{matrix} \left(\sum_{|\alpha+\beta| \le m} \sigma_0(C_{\alpha\beta})(\mathring{\eta}) t^{\alpha} D_t^{\beta} \right) \cap \mathcal{S}_t \right)$ such that

$$Pu \in \mathcal{A}(0,\mathring{\eta}dy) \Longrightarrow u - HH^*u \in \mathcal{A}(0,\mathring{\eta}dy),\ MH^*u \in \mathcal{A}_y(0,\mathring{\eta}dy).$$

In this note we shall extend their results to the case when $C_{\alpha\beta}$ depends on y. Moreover, we can get a more explicite formula for M_j's.

In application, we can show the following:

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{N-1} (D_j^2 + x_j^2 D_N^2) - (N-1)D_N + \begin{bmatrix} \sum_{i,j=1}^{N-1} c_{ij} x_i x_j D_N, & \mathrm{tr}(c_{ij}) \neq 0 \\ \sum_{j=1}^{N-1} c_j D_j \text{ or } \sum_{j=1}^{N-1} c_j x_j D_N, & \sum c_j^2 \neq 0 \end{bmatrix}$$

is analytic hypoelliptic.

$$(2) \qquad D_t^2 + t^2(D_{y_1}^2 + D_{y_2}^2) - D_{y_2} + [ct^2 D_{y_2} \text{ or } c\ ]$$

is not analytic hypoelliptic. Moreover, it is Gevrey^s hypoelliptic for $s \ge 2$ if $c \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}^-}$ but not so for $c \in \overline{\mathbb{R}^-}$.

$$(3) \qquad D_t^2 + t^2(D_{y_1}^2 + D_{y_2}^2) - D_{y_2} + \tfrac{1}{2} y_1^2 D_{y_2} - c$$

is analytic hypoelliptic at 0 if $c \notin \{j+\frac{1}{2}; j=0,1,2,\cdots\}$.

§1. 準備

Notation

M; $\mathbb{R}^m$ の開集合, $\pi: T^*(M) \to M$; 余接束と標準射影.

$\dot{T}^*(M) = T^*(M) - M$, $x^* = (x, \xi)$; point in $\dot{T}^*(M)$.

$WF_A(u)$ (resp. $WF(u)$); $u \in \mathcal{D}'(M)$ の analytic (resp. C^∞) wave

front set ($\subset \dot{T}^*(M)$)

$\mathcal{A}_{M,x^*} = \{u \in \mathcal{D}'(M);\ x^* \notin WF_A(u)\}$

$\mathcal{C}^f_M$; pre sheaf of micro-distribution on $\dot{T}^*(M)$:

$$\mathcal{C}^f_M(\omega) = \mathcal{D}'(M) / \{u \in \mathcal{D}'(M);\ WF_A(u) \cap \omega = \phi\} \quad (\underset{\text{open}}{\omega \subset \dot{T}^*(M)})$$

$\mathcal{C}^f_{M,x^*} = \varinjlim_{\omega \ni x^*} \mathcal{C}^f_M(\omega) = \mathcal{D}'(M)/\mathcal{A}_{M,x^*}$; germ of micro-distribution.

($\mathcal{D}'$ が soft sheaf なることより $\mathcal{C}^f_{M,x^*} \simeq \mathcal{C}^f_{\mathbb{R}^m,x^*}$)

$\mathcal{L}(A, B)$; A から B への連続線型作用素の空間.

1.1. $M \subset \mathbb{R}^m$, $N \subset \mathbb{R}^n$ を 2つの開集合とする. Schwartzの核定理により $K \in \mathcal{L}(C_0^\infty(N), \mathcal{D}'(M))$ は その distribution 核. $K(x,y) \in \mathcal{D}'(M \times N)$ と同一視され $Ku(x) = \int K(x,y)u(y)\,dy$ と書かれる. また formal adjoint $K^* \in \mathcal{L}(C_0^\infty(M), \mathcal{D}'(N))$ は $K^*v(y) = \int \overline{K(x,y)}\,v(x)\,dy$ で与えられる.

核 $K(x,y)$ を持つ作用素 K に対し.

$$WF'(K)_N = \{(y,\eta);\ (x,y;0,-\eta) \in WF(K) \text{ for some } x \in M\},$$
$$WF(K)_M = \{(x,\xi);\ (x,y;\xi,0) \in WF(K) \text{ for some } y \in N\},$$
$$WF'_A(K) = \{(x,\xi;y,\eta);\ (x,y;\xi,-\eta) \in WF_A(K)\}$$

と書く。もし $WF'(K)_N = \phi$ なら Kは $\mathcal{E}'(N) \to \mathcal{D}'(M)$ に拡張され 次が成立する;

$$WF_A(Ku) \subset WF'_A(K) \circ (WF_A(u) \cup \operatorname{supp}(u)).$$

以下では $m \geq n$ とし，$\iota : T^*(N) \to T^*(M)$ なる斉次な injection map が与えられているとする。$\omega \subset T^*(N)$ を開集合とする。とき、

<u>定義</u>(1.1) $K \in \mathcal{L}(C_0^\infty(N), \mathcal{D}'(M))$ が"ιに関して ωで micro-local である"とは $\iota(\omega)$ の近傍 $\tilde{\omega} \subset T^*(M)$ があり 次をみたすこととする:

(i) $WF'(K)_N = WF(K)_M = \phi$,

(ii) $WF'_A(K) \cap (\tilde{\omega} \times \pi_N^{-1}\pi_N(\omega)) \subset \{(\iota(y^*), y^*);\ y^* \in \omega\}$,

(ii)* $WF'_A(K) \cap (\pi_M^{-1}\circ\pi_M(\tilde{\omega}) \times \omega) \subset \{(\iota(y^*), y^*);\ y^* \in \omega\}$.

このとき $\mathring{y}^* \in \omega$ に対し $\chi \in C_0^\infty(\pi_N(\omega))$, $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\pi_M(\tilde{\omega}))$ を $\mathring{y}^*$, $\iota(\mathring{y}^*)$ の近傍で $\equiv 1$ となるようにとり，$(K)_{\mathring{y}^*} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}'(N), \mathcal{E}'(M))$ を $(K)_{\mathring{y}^*}u(x) = \tilde{\chi}(x)K(\chi u)(x)$ と定めれば $(K)_{\mathring{y}^*}$ (resp. $(K)^*_{\mathring{y}^*}$) は $\mathcal{C}^+_{N,\mathring{y}^*}$ から $\mathcal{C}^+_{M,\iota(\mathring{y}^*)}$ への homomorphism (resp. $\mathcal{C}^+_{M,\iota(\mathring{y}^*)}$ から $\mathcal{C}^+_{N,\mathring{y}^*}$ への homo.) を induce する。我々はこの factrized op. を $\underline{K}$ (resp. $\underline{K}^*$) と書く。

1.2. Tempered micro diff. ops.

$N = \mathbb{R}^n_y \subset \mathbb{C}^n$ とし，$\mu \in \mathbb{Z}/2$ に対し．

定義 (1.2)

$$\mathcal{E}_N^{\mathbb{Z}/2\,(\mu)} = \begin{cases} \mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}^{(\mu)}\Big|_{iT_N^*(\mathbb{C}^n)} \otimes \{1, |D_y|^{-\frac{1}{2}}\} & \text{if } \mu \in \mathbb{Z} \\ \mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}^{(\mu-\frac{1}{2})}\Big|_{iT_N^*(\mathbb{C}^n)} \otimes \{1, |D_y|^{\frac{1}{2}}\} & \text{if } \mu - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\left(D_{y_j} = -i\frac{\partial}{\partial y_j},\ j=1,\cdots,n,\ \ \sigma(|D_y|) = \sqrt{\eta_1^2 + \cdots + \eta_n^2} \right)$$

とおく，ただし，$\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}^{(\mu)}$ は $T^*(\mathbb{C}^n)$ 上の高々 μ 階の micro-diff. op の層とする．ここでは $\dot{T}^*(N)$ と $i\dot{T}_N^*(\mathbb{C}^n)$ を同一視し $\mathcal{E}_N^{\mathbb{Z}/2\,(\mu)}$ を $\dot{T}^*(N)$ 上の層と考える

$A = A(y, D_y) \in \mathcal{E}_N^{\mathbb{Z}/2}(\omega)$ は次をみたす symbol 列 $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ で定義することもできる：

(i) ω の複素近傍 $\omega^{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n \setminus 0)$ があり $a_j(y,\eta)$ は $\omega^{\mathbb{C}}$ で正則で η について $(\mu - \frac{j}{2})$ 次斉次．

(ii) $\forall \omega_0^{\mathbb{C}} \subset\subset \omega^{\mathbb{C}}$ $\exists c > 0$ ？ $\sup_{y^* \in \omega_0^{\mathbb{C}}} |a_j(y^*)| \le c^{j+1}\sqrt{j!}$．

このとき a_0 を $\sigma^0(A)$ と表き A の主 symbol と呼ぶ．

$A \in \mathcal{E}_{N,y^*}^{\mathbb{Z}/2}$ は $\mathcal{C}_{N,y^*}$ (germ of micro f.t. at y^*) に準同型として作用するが．この作用は は distribution 核を持つ作用素により実現される．これにより，A の $\mathcal{C}_{N,y^*}^f$ への作用が well defined となる．(Metivier [6] p21~p35 を見よ)

§2. 結果

$\{0\}\times N = \{0\}\times \mathbb{R}^n_y \hookrightarrow M = \mathbb{R}^1_t \times N$, $\iota : \dot{T}^*(N) \ni (y,\eta) \mapsto (0,y;0,\eta) \in \dot{T}^*(M)$,

$\Sigma = \iota(\dot{T}^*(N)) = \dot{T}^*(M) \cap \{t = \tau = 0\}$ とする.

$\mathring{y}^* = (\mathring{y},\mathring{\eta}) \in \dot{T}^*(N)$ $(|\mathring{\eta}| = 1)$, $\mu \in \mathbb{Z}/2$ に対し, $\iota(\mathring{y}^*)$ の近傍で定義された次の形の micro diff. op. を考える.

$$P = \sum_{|\alpha|+|\beta|\le m} C_{\alpha\beta}(y, D_y)\, t^\alpha D_t^\beta, \quad C_{\alpha\beta} \in \mathcal{E}^{\mathbb{Z}/2\,(\mu+\frac{|\alpha|}{2}-\frac{|\beta|}{2})}_{N,\mathring{y}^*} \tag{2.1}$$

この P に対し

$$\sigma^\circ(P)_{\mathring{y}^*}(t,\tau) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=m} \sigma^\circ(C_{\alpha\beta})(\mathring{y}^*)\, t^\alpha \tau^\beta$$

$$\hat{\sigma}_\Sigma(P)_{\mathring{y}^*} = \sum_{|\alpha|+|\beta|\le m} \sigma^\circ(C_{\alpha\beta})(\mathring{y}^*)\, t^\alpha D_t^\beta \in \mathcal{L}(\mathcal{S}'_t, \mathcal{S}'_t)$$

とおき, 次を仮定する.

(A-1) $\exists c > 0$ s.t. $|\sigma^\circ(P)_{\mathring{y}^*}(t,\tau)| \ge c(|t|+|\tau|)^m$,

(A-2) $\dim(\mathrm{Ker}(\hat{\sigma}_\Sigma(P)_{\mathring{y}^*}) \cap \mathcal{S}_t) \ne 0$.

(注意) (A-1) の仮定の下 $\hat{\sigma}_\Sigma(P)_{\mathring{y}^*}$ は $\mathcal{S}'_t \to \mathcal{S}'_t$ の Fredholm op となり $\mathrm{Ker}(\hat{\sigma}_\Sigma(P)_{\mathring{y}^*})$ は $\mathcal{S}_t$ に含まれる. 加えて $\mathrm{Ker}(\hat{\sigma}_\Sigma(P)_{\mathring{y}^*}) = \{0\}$ ならば, P が $\mathring{y}^*$ で A-m.h.e. (: analytic micro hypo elliptic) となることは $C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}(t,y;D_t,D_y)$ の場合もこめて Metivier [6] により証明されている.

さて $k_+ = \dim(\mathrm{Ker}(\hat{\sigma}_\Sigma(P)_{y^*}))$, $k_- = \dim(\mathrm{Coker}(\hat{\sigma}(P)_{y^*}))$ とおいて我々の主定理を述べる.

<u>定理</u> (2.2) P は (A-1), (A-2) をみたすとせよ. このとき,

$$M \in \mathcal{E}_{N,y^*}^{\mathbb{R}/2\,(\infty)} \otimes \mathbb{C}^{k_- \times k_+} : (\mathcal{C}^f_{N,y^*})^{k_+} \to (\mathcal{C}^f_{N,y^*})^{k_-}$$

と 2 に関して micro local な 2 つの作用素

$$H_+ : (\mathcal{E}'(N))^{k_+} \longrightarrow \mathcal{D}'(M)$$

$$H_- : (\mathcal{E}'(N))^{k_-} \longrightarrow \mathcal{D}'(M)$$

が存在し, 次の同型を与える.

$$\underline{H_+} : \mathrm{Ker}(M; (\mathcal{C}^f_{N,y^*})^{k_+} \to (\mathcal{C}^f_{N,y^*})^{k_-}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(P; \mathcal{C}^f_{M,(0,y^*)} \to \mathcal{C}^f_{M,(0,y^*)})$$

$$[\underline{H_-^*}] : \mathrm{Coker}(P; \mathcal{C}^f_{M,(0,y^*)} \to \mathcal{C}^f_{M,(0,y^*)}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}(M; (\mathcal{C}^f_{N,y^*})^{k_+} \to (\mathcal{C}^f_{N,y^*})^{k_-})$$

(注意) (1) $H_\pm$ は $y^* \sim y^*$ で主 symbol $(h^{(0)}_{\pm 1}(t;y^*), \ldots, h^{(0)}_{\pm k_\pm}(t;y^*))$ を持ち $\{h^{(0)}_{+\ell}(t;y^*)\}_{\ell=1}^{k_+}$ (resp. $\{\{h^{(0)}_{-\ell}(t,y^*)\}_{\ell=1}^{k_-}\}$) は $\mathrm{Ker}\,\hat{\sigma}_\Sigma(P)_{y^*}$ (resp. $\mathrm{Ker}(\hat{\sigma}_\Sigma(P)_{y^*}^*)$) の base となっている.

(2) Grigis - Rothschild [1] は $C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}(D_y)$ の場合にこの結果を証明している. また $d=1$ の時は Kashiwara - Kawai - Oshima [3] に同様の結果がある.

(3) 我々は M の定める micro-diff. system を "<u>Interior boundary system</u> on Σ (, induced by P)" と呼ぶことにする.

系 (2.3) (1) P が $\tau(\dot{y}^+)$ で $\mathcal{A}$-micro hypoelliptic (resp. C^∞-m.h.e)

$\iff$ M が $\dot{y}^*$ で $\mathcal{A}$-microhypoelliptic (resp. C^∞-m.h.e)

(2) $f \in \mathcal{E}'(M)$ とする. $\exists u \in \mathcal{E}'(M)$ s.t. $Pu - f \in \mathcal{A}_{M,\tau(\dot{y}^+)}$

$\iff$ $\exists v_+ \in (\mathcal{E}'(N))^{k_+}$ s.t. $\mathcal{H}^*_- f + M v_+ \in (\mathcal{A}_{N,\dot{y}^+})^{k_-}$

(ただし, P, M は distribution 核による適当な realization を表わす)

具体例の計算は §6 で行なうが M, $\mathcal{H}_\pm$ のイメージを持ってもらうため ここでも一つ例をあげる

例 (2.4) $P = D_t^2 + t^2(D_{y_1}^2 + D_{y_2}^2) - D_{y_2} + c$ in $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^2_y$

を $(0, dy_2)$ で考えると

$$\mathcal{H}_+ = \mathcal{H}_- = \left(\frac{|D_y|}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{t^2}{2}|D_y|} : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^2_y) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3_{t,y})$$

$$M = |D_y| - D_{y_2} + c = D_{y_2}^{-1}\left(\frac{1}{2}D_{y_1}^2 + cD_{y_2}\right) + O\left(\left|\frac{D_{y_1}}{D_{y_2}}\right|^4\right) D_{y_2}$$

となる. 故に $c \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}^-}$ ならば P は $(0, dy_2)$ で C^∞-m.h.e. であるが いかなる c に対しても そこで $\mathcal{A}$-m.h.e とはならない

§3. Symbol と Banach scale.

3.1. Symbol Spaces.

$y^* = (\mathring{y}, \mathring{\eta}) \in \dot{T}^*(N)$ ($|\mathring{\eta}| = 1$) を固定し，次の形の $\mathring{y}^*$ の近傍を考える．

$$\omega_\rho = \{(y, \eta) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus 0) ; |y - \mathring{y}| < \rho , |\eta - \mathring{\eta}| < \rho\}$$

$$\omega_\rho^{\mathbb{C}} = \{(y, \eta) \in \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n \setminus 0) ; |y - \mathring{y}| < \rho , |\eta - \mathring{\eta}| < \rho\}$$

ただし．$0 < \rho < 1$，また．

$$\Gamma\omega_\rho = \{(y, \lambda\eta) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus 0) ; (y, \eta) \in \omega_\rho , \lambda > 0\}$$

$$\Gamma\omega_\rho^{\mathbb{C}} = \{(y, \lambda\eta) \in \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n \setminus 0) ; (y, \eta) \in \omega_\rho^{\mathbb{C}} , \lambda > 0\}$$

とおく．

$B = B(\lambda)$ は ある Banach space で その norm は λ に依存してもよいものとする．

<u>定義</u> (3.1.1) $\mu \in \mathbb{Z}/2$，$y^* = (y, \eta)$ とする．

(1) $p(y^*) \in \mathcal{O}^{(\mu)}(\omega_\rho^{\mathbb{C}} ; B)$

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (i) $p(y^*)$ は $\Gamma\omega_\rho^{\mathbb{C}}$ で定義された B に値をとる正則関数．

(ii) $\|p(y, \lambda\eta)\|_{B(\lambda)} = \lambda^\mu \|p(y, \eta)\|_{B(1)}$ for $(y, \eta) \in \omega_\rho$，$\lambda > 0$

(iii) $\sup_{y^* \in \omega_\rho^{\mathbb{C}}} \|p(y^*)\|_{B(1)} < +\infty$．

(2) $\sum_{j=0}^{\infty} p_j(y^*) \in FS^{(\mu)}(\omega_\rho^{\mathbb{C}} ; B)$

$$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{(i)} \quad p_j(y^*) \in \mathcal{O}^{(\mu - j/2)}(\omega_\rho^{\mathbb{C}}; B)$$

$$\text{(ii)} \quad \exists\, C \geqq 0 \quad \text{s.t.} \quad \sup_{y^* \in \omega^*} \| p_j(y^*) \|_{B(1)} \leq C^{j+1} \sqrt{j!}$$

(3) $\quad p(y^*) \in S^{(\mu)}(\Gamma_{\omega_\rho}; B)$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{(i)} \quad p(y^*) \in C^\infty(\Gamma_{\omega_\rho}; B)$$

$$\text{(ii)} \quad \exists\, C \geq 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall \alpha = (\alpha_+, \alpha_-) \in \mathbb{N}^d$$

$$\| \partial_y^{\alpha_+} \partial_\eta^{\alpha_-} p(y, \eta) \|_{B(|\eta|)} \leq C^{|\alpha|+1} (1 + |\eta|)^\mu |\alpha_+|^{|\alpha_+|} \left(\frac{|\alpha_-|}{|\eta|} \right)^{\alpha_-}$$

$$\text{for} \quad (y, \eta) \in \Gamma_{\omega_\rho}, \quad |\eta| \geq C(|\alpha_-| + 1)$$

(注意) Cauchy の不等式により $\rho_0 < \rho$ なら $\mathcal{O}^{(\mu)}(\omega_\rho^{\mathbb{C}}; B)\big|_{\Gamma_{\omega_{\rho_0}}} \hookrightarrow S^{(\mu)}(\Gamma_{\omega_{\rho_0}}; B)$

<u>定義</u> (3.1.2) $\quad 0 < \rho_0 < \rho$ とする. $p \in S^{(\mu)}(\Gamma_{\omega_{\rho_0}}; B)$, $\sum_{j=0}^{\infty} p_j \in FS^{(\mu)}(\omega_\rho^{\mathbb{C}}; B)$ に対し, $p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j$ in $\Gamma_{\omega_{\rho_0}}$ とは, 適当な $C > 0$ に対して, 次が成立することとする:

$$\| \partial_y^{\alpha_+} \partial_\eta^{\alpha_-} \left(p(y, \eta) - \sum_{j=1}^{N-1} p_j(y, \eta) \right) \|_{B(|\eta|)} \leq C^{|\alpha|+N+1} (1+|\eta|)^{\mu - N/2} N^{\frac{N}{2}} |\alpha_+|^{|\alpha_+|} \left(\frac{|\alpha_-|}{|\eta|} \right)^{|\alpha_-|}$$

$$\text{for} \quad (y, \eta) \in \Gamma_{\omega_{\rho_0}}, \quad |\eta| \geq C(|\alpha_-| + N + 1)$$

<u>補題</u> (3.1.3) $\quad \sum_{j=0}^{\infty} p_j \in FS^{(\mu)}(\omega_\rho^{\mathbb{C}}; B)$ とすると $\forall \rho_0 \in (0, \rho)$ に対し $p \in S^{(\mu)}(\Gamma_{\omega_{\rho_0}}; B)$ で $p \sim \sum p_j$ in $\Gamma_{\omega_{\rho_0}}$ となるものが構成できる.

また 他の $p' \in S^{(\mu)}(\Gamma_{\omega_{\rho_0}}; B)$ について $p' \sim \sum p_j$ in $\Gamma_{\omega_{\rho_0}}$ となれば $p - p' \sim 0$ in $\Gamma_{\omega_{\rho_0}}$.

∵) Métivier [6] Lemma 3.2 と同じ.

3.2. ここで $a \in S^{m}(\Gamma_{\omega_\rho}) \equiv S^{m}(\Gamma_{\omega_\rho}; \mathbb{C})$ の $\mathcal{C}^f_{N, y^*}$ への作用について述べておく.

補題 (3.2.1) $0 < \rho_0 < \rho_1 < \rho$ に対し $g = g(\eta) \in C^\infty(\mathbb{R}^n_\eta)$ で

(i) $$\begin{cases} g(\eta) \equiv 0 & \text{for } \left|\frac{\eta}{|\eta|} - \mathring{\eta}\right| > \rho_1 \text{ or } |\eta| < 1 \\ g(\eta) \equiv 1 & \text{if } \left|\frac{\eta}{|\eta|} - \mathring{\eta}\right| < \rho_1 \text{ and } |\eta| > 2 \end{cases}$$

及び, 適当な C について,

(ii) $$|\partial_\eta^\alpha g(\eta)| \leq C^\alpha \left(\frac{|\alpha|}{|\eta|}\right)^{|\alpha|/2} \quad \text{for } |\eta| \geq |\alpha|$$

をみたすものが存在する. (Metivier [6] Lemma 3.1)

そこで

$$A(y, y') = \int e^{i(y-y')\eta} a(y, \eta) g(\eta) \frac{d\eta}{(2\pi)^n} \in \mathcal{D}'(\pi(\omega_\rho) \times N)$$

とおけば, $WF_A'(A) \subset \mathrm{diag}(\Gamma_{\omega_\rho})$ となる. (loc. cit Lemma 3.3)

これが定める作用素 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{E}'(N), \mathcal{D}'(\pi(\omega_\rho)))$ を factrize して $\underline{A} : \mathcal{C}^f_{N, y^*} \to \mathcal{C}^f_{\pi(\omega_\rho), y^*} \simeq \mathcal{C}^f_{N, y^*}$ が得られる. また $a \sim 0$ in $\Gamma_{\omega_{\rho'}}$ $(\rho' < \rho_0)$ ならば $WF_A'(A) \cap (\omega_{\rho'} \times \omega_{\rho'}) = \phi$ がいえ, $\underline{A}$ が g の選び方によらないこと及び, $FS^{(m)}(\omega_\rho^*)$ の $\mathcal{C}^f_{N, y^*}$ への作用が和のとり方によらず well defined となることがわかる. この A あるいは $\underline{A}$ を $a(y, D_y)_{y^*}$ と書く. また 6 により $\mathcal{E}^{\mathbb{R}/2\,(m)}_{N, y^*} \simeq \bigcup_{\rho > 0} FS^{(m)}(\omega_\rho)$ だから $\mathcal{E}^{\mathbb{R}/2}_{N, y^*}$ の $\mathcal{C}^f_{N, y^*}$ への作用も定義されたことになる.

3.3. ここでは主定理の証明で必要となるいろいろなBanach 空間 $B(\lambda)$ を定義する. また積に関する評価をMetivier [6] や Okaj [7] から引用しまとめておく.

定義 (3.3.1) $A^{(m)} = \{ p = \sum_{|\alpha|+|\beta| \le m} C_{\alpha\beta} t^\alpha D_t^\beta ; C_{\alpha\beta} \in \mathbb{C} \}$, $\|P\|_{A^{(m)}(\lambda)} = \max_{\alpha,\beta} \{ |C_{\alpha\beta}| \lambda^{(|\beta|-|\alpha|)/2} \}$ とする. また $\sigma(p) = \sum C_{\alpha\beta} t^\alpha \tau^\beta$ と書く.

定義 (3.3.2) $m(\pm) = \{ M \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{k+}, \mathbb{C}^{k-}) \} \simeq \{ (m_{\ell\ell'})_{\substack{\ell=1\cdots k_- \\ \ell'=1\cdots k_+}} \in \mathbb{C}^{k_- \times k_+} \}$

$\|M\|_{m(\pm)} = \max_{\ell,\ell'} |m_{\ell,\ell'}|$ とする. $\sigma(M) = (m_{\ell\ell'})_{\substack{\ell=1\cdots k_- \\ \ell'=1\cdots k_+}}$ と書く

- $T_j = T_j(\lambda) = \lambda^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial t_j}$, $T_{-j} = T_{-j}(\lambda) = i \lambda^{\frac{1}{2}} t_j$ $(j = 1, \cdots, d)$ とおく.
- $I = (i_1, \cdots, i_k)$ に対し $|I| = k$, $T_I = T_{i_1} T_{i_2} \cdots T_{i_k}$ とする.
- $L \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_t ; \mathcal{S}'_t)$ に対し $(\mathrm{ad}T_j)(L) = [T_j, L] = T_j L - L T_j$ と書き,

  $(\mathrm{ad}\,T)^\alpha = \prod_j (\mathrm{ad}\,T_j)^{\alpha_j}$ for $\alpha = (\alpha_+, \alpha_-) \in \mathbb{N}^{2d}$ とする.

  また. $\|L\|_{(0)} = \|L\|_{\mathcal{L}(L^2, L^2)} = \sup_{u \ne 0} \frac{\|Lu\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}}$ と書く.

定義 (3.3.3) $m \ge 0$, $R > 0$ に対し,

$$L \in \mathcal{L}_R^{(m)} \underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \text{(i)} \ L \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_+, \mathcal{S}'_+)$$

$$\text{(ii)} \ \exists C \ \text{s.t.} \ \|T_I (\mathrm{ad}T)^\alpha (L) T_J\|_{(0)} \le C R^{|\alpha|} \alpha! \quad \text{for } |I| + |J| \le m + |\alpha|$$

とする. また (ii) を成立させる最小の C を $\|L\|_{\mathcal{L}_R^{(m)}(\lambda)}$ と書く.

補題 (3.3.4) $\exists C = C(d,m)$ s.t.

$$\|PL\|_{\mathcal{L}^0_R(\lambda)} \le C\|P\|_{A^{(m)}(\lambda)}\|L\|_{\mathcal{L}^{(m)}_R(\lambda)} \quad \text{for } P \in A^{(m)}(\lambda),\ L \in \mathcal{L}^{(m)}_R(\lambda)$$

$K \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_t, \mathcal{S}'_t)$ の核を $K(t,t')\ (\in \mathcal{S}'_{t,t'})$ と書く．また．

$$\hat{K}(\tau,\tau') = \iint e^{-it\tau + it'\tau'} K(t,t')\,dt\,dt' \quad \text{とおく．} \quad (\widehat{Ku} = \hat{K}\hat{u})$$

定義 (3.3.5) $\varepsilon > 0$ に対し．$B_\varepsilon = B_\varepsilon(\lambda)$ を次をみたす Hilbert-Schmidt 作用素 K の空間とする：

(i) $\|e^{\lambda\varepsilon|t_j^2 - t_j'^2|} K(t,t')\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d}_{t,t'})} < +\infty$, $j = 1,2,\cdots d$,

(ii) $\|e^{\varepsilon|\tau_j^2 - \tau_j'^2|/\lambda} \hat{K}(\tau,\tau')\|_{L^2(\mathbb{R}^{2d}_{\tau,\tau'})} < +\infty$, $j = 1,2,\cdots d$.

また i), (ii) の norm の中で最大となるものを $\|K\|_{B_\varepsilon(\lambda)}$ と書く．

補題 (3.3.6) (Métivier [6] Prop 2.8) $m \ge d+1$ ならば．任意の $R > 0$ に対し．適当な ε_0，C_0 があり．次が成立する：

$$\|L\|_{B_{\varepsilon_0}(\lambda)} \le C_0 \|L\|_{\mathcal{L}^{(m)}_R(\lambda)} \quad \text{for } {}^\forall L \in \mathcal{L}^m_R.$$

補題 (3.3.7) (loc. cit Prop 2.9) 任意の $R > 0$．に対し．$\varepsilon_0 > 0$，$C_0 > 0$ があり．$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ なら．

$$\|LK\|_{B_\varepsilon(\lambda)} \le C_0\|L\|_{\mathcal{L}^{(0)}_R}\|K\|_{B_\varepsilon(\lambda)} \quad \text{for } L \in \mathcal{L}^{(0)}_R(\lambda),\ K \in B_\varepsilon(\lambda).$$

定義 (3.3.8) $h(t) \in H_\varepsilon(\lambda)$ $(\varepsilon > 0)$

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (i) $h(t) \in \mathcal{S}_t$

(ii) $\| e^{\lambda \varepsilon t_j^2} h(t) \|_{L^2(\mathbb{R}^d_t)} < +\infty$, $j = 1, 2, \cdots d$.

(iii) $\| e^{\varepsilon \tau_j^2/\lambda} \hat{h}(\tau) \|_{L^2(\mathbb{R}^d_\tau)} < +\infty$, $j = 1, 2, \cdots d$.

また (ii), (iii) の norm のうち最大のものを $\|h\|_{H_\varepsilon(\lambda)}$ と書く.

補題 (3.3.9) $\forall R > 0$ に対し, $\varepsilon_0 > 0, C_0 > 0$ があり, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ に対し,

$$\| L h \|_{H_\varepsilon(\lambda)} \leq C_0 \| L \|_{\mathcal{L}^{(0)}_R(\lambda)} \| h \|_{H_\varepsilon(\lambda)} \quad \text{for } L \in \mathcal{L}^{(0)}_R(\lambda),\ h \in H_\varepsilon(\lambda).$$

さて, $(h_1, \cdots h_k) \in (H_\varepsilon(\lambda))^k$ に対し 作用素 $\mathcal{H}, \mathcal{H}^*$ を

$$\mathcal{H} : \mathbb{C}^k \ni (z_\ell)_{\ell=1}^k \longmapsto \sum_{\ell=1}^k h_\ell(t) z_\ell \in \mathcal{S}_t$$

$$\mathcal{H}^* : \mathcal{S}'_t \ni u(t) \longmapsto \left(\int \bar{h}_\ell(t) u(t) dt \right)_{\ell=1}^k \in \mathbb{C}^k$$

で定義する. このような作用素の空間を $\mathscr{H}^k_\varepsilon(\lambda)$, ${}^*\mathscr{H}^k_\varepsilon(\lambda)$ と書き. $\| H \|_{\mathscr{H}^k_\varepsilon(\lambda)} = \| H^* \|_{{}^*\mathscr{H}^k_\varepsilon(\lambda)} = \max_\ell \| h_\ell \|_{H_\varepsilon(\lambda)}$ と定める

また $\sigma(H) = (h_1, \cdots, h_k) \in (H_\varepsilon(\lambda))^k$ と書く.

定義 (3.3.10) $\mathscr{H}^+_\varepsilon(\lambda) = \mathscr{H}^{k+}_\varepsilon(\lambda)$, $\mathscr{H}^-_\varepsilon(\lambda) = \mathscr{H}^{k-}_\varepsilon(\lambda)$

また ${}^*\mathscr{H}^+_\varepsilon(\lambda) = {}^*\mathscr{H}^{k+}_\varepsilon(\lambda)$, ${}^*\mathscr{H}^-(\lambda) = \mathscr{H}^{k-}_\varepsilon(\lambda)$

補題 (3.3.11) $K \in B_\varepsilon(\lambda)$, $H_0, H_1 \in \mathcal{H}_\varepsilon^{k}(\lambda)$, $H_2 \in \mathcal{H}_\varepsilon^{k'}(\lambda)$ $(\varepsilon > 0)$

とすると $KH_0 \in \mathcal{H}_\varepsilon^{k}(\lambda)$, $H_0 H_1^* \in B_\varepsilon(\lambda)$, $H_2^* H_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^{k'})$, さらに

(1) $\|KH_0\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^{k}(\lambda)} \le \|K\|_{B_\varepsilon(\lambda)} \|H_0\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^{k}}$

(2) $\|H_0 H_1^*\|_{B_\varepsilon(\lambda)} \le k \|H_0\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^{k}(\lambda)} \|H_1\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^{k}(\lambda)}$

(3) $\|H_2^* H_1\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^{k'})} \le \|H_2\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^{k'}(\lambda)} \|H_1\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^{k}(\lambda)}$

補題 (3.3.12) (Metivier [6] prop 2.10. Okaj [7] Lemma 4.2)

$M = M(d)$ が存在し、任意の $0 < \varepsilon' < \varepsilon < 1$ に対し次が成立：

(1) $\|(\mathrm{ad}\, T_j)(K)\|_{B_{\varepsilon'}(\lambda)} \le M \left(\frac{M}{\varepsilon - \varepsilon'}\right)^{\frac{1}{2}} \|K\|_{B_\varepsilon(\lambda)}$ for $\begin{cases} K \in B_\varepsilon(\lambda) \\ j = \pm 1, \cdots, \pm d \end{cases}$

(2) $\|T_j(h)\|_{H_\varepsilon(\lambda)} \le M \left(\frac{M}{\varepsilon - \varepsilon'}\right)^{\frac{1}{2}} \|h\|_{H_\varepsilon(\lambda)}$ for $\begin{cases} h \in H_\varepsilon(\lambda) \\ j = \pm 1, \cdots, \pm d \end{cases}$

定義 (3.3.13) $k(t, z) \in G_R^{\frac{1}{2}(m)}(\lambda)$ $(m \ge 0,\ R > 0)$

$\underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ (i) $k(t, z) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d}_{t,z})$

(ii) $\exists\, C$ s.t.

$$\sup_{\mathbb{R}^{2d}_{t,z}} \left(\frac{|\partial_t^{\alpha_+} \partial_z^{\alpha_-} k(t, z)|}{\lambda^{(|\alpha_+| - |\alpha_-|)/2} (1 + \lambda^{\frac{1}{2}} t + \lambda^{-\frac{1}{2}} z)^m} \right) \le C R^{|\alpha|} \sqrt{\alpha!}$$

$K(t, t') \in \mathcal{S}'_{t,t'}$ を核関数とする作用素 K に対し、$k = \sigma(K)$

を

$$\tilde{k}(t,\tau) = \int k(t, t-t')\, e^{-it'\tau}\, dt'$$

とおけば

$$K\, u(t) = \tilde{k}(t, D_t)\, u(t) = \int e^{it\tau}\, \tilde{k}(t,\tau)\, \hat{u}(\tau)\, \frac{d\tau}{(2\pi)^d}$$

と書ける。

$\sigma((\mathrm{ad}T)^\alpha(k)) = \lambda^{(|\alpha^-|-|\alpha^+|)/2}\, \partial_t^{\alpha^+} \partial_\tau^{\alpha^-} \sigma(k)$ と補題(3.3.12) より 次を得る。

<u>補題</u> (3.3.15) $\forall \varepsilon > 0$ に対し、$R > 0$, $C > 0$ があり

$$\| \sigma(k) \|_{G_R^{\frac{1}{2}(0)}(\lambda)} \leq C \| K \|_{B_\varepsilon(\lambda)} \quad \text{for } K \in B_\varepsilon(\lambda).$$

§4. パラメトリックスの構成

$P = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq m} C_{\alpha\beta}(y, D_y)\, t^\alpha D_t^\beta$ は §2で与えたものとする。以下では簡単のため $\mu = 0$ と仮定しておく。ρを小さくとり $\sigma(C_{\alpha\beta}) - \sum_{j\geq 1} C_{\alpha\beta}^{(j)}(y^*) \in FS^{(\frac{|\alpha|+|\beta|}{2})}(\omega_\rho^\varepsilon)$ としてよい。

$$\hat{P}_j(y^*) = \sum_{|\alpha|+|\beta| \leq m} C_{\alpha,\beta}^{(j)}(y^*)\, t^\alpha D_t^\beta \in O^{(-j/2)}(\omega_\rho^\varepsilon; A^{(m)})$$

とおけば、$\hat{P}(y^*) \equiv \sum \sigma(C_{\alpha\beta})(y^*)\, t^\alpha D_t^\beta = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{P}_j(y^*) \in FS^{(0)}(\omega_\rho^\varepsilon; A^{(m)})$ となる また $\hat{P}_0^*(y^*) = \hat{\sigma}_\Sigma(P)_{y^*}$ である。

$y^* \in \omega_\rho^\varepsilon$ に対し、$\hat{P}_j^*(y^*) = (\hat{P}_j(\bar{y}^*))^*$ とし

$\hat{P}_0^*\hat{P}_0(y^*) = \hat{P}_0^*(y^*)\hat{P}_0(y^*)$, $\hat{P}_0\hat{P}_0^*(y^*) = \hat{P}_0(y^*)\hat{P}_0^*(y^*)$ と書く.
必要なら ρ をとりなおし $\forall y^* \in \omega_\rho^{\mathbb{C}}$ で

$$\Big|\sum_{|\alpha|+|\beta|=m} C^{(0)}_{\alpha\beta}(y^*)\, t^\alpha \tau^\beta\Big| \geq C(|t|+|\tau|)^m \qquad (c>0)$$

が成立しているものとする. このとき $\hat{P}_0^*\hat{P}_0$ 及び $\hat{P}_0\hat{P}_0^*$ は $\hat{P}_0$ とともに $\mathcal{S}'_t$ から $\mathcal{S}'_t$ への Fredholm op となる.

さて $\gamma \subset \mathbb{C}$ を原点を正の向きにまわる閉曲線で. $\hat{P}_0^*\hat{P}_0(y^*)$ 及び $\hat{P}_0\hat{P}_0^*(y^*)$ の 0 以外の固有値を内部に含まないものとする. $\rho_0 \in (0,\rho)$ を小さくとれば $\forall y^* \in \omega_{\rho_0}^{\mathbb{C}}$, $\forall \zeta \in \gamma$ に対し resolvent $(\hat{P}_0^*\hat{P}_0 - \zeta)^{-1}$, $(\hat{P}_0\hat{P}_0^* - \zeta)^{-1}$ が存在する. そこで, $y^* \in \omega_{\rho_0}^{\mathbb{C}}$ に対し.

$$\hat{Q}_0(y^*) = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_\gamma \zeta^{-1}(\hat{P}_0^*\hat{P}_0(y^*) - \zeta)^{-1} d\zeta\Big)\hat{P}_0^*(y^*)$$

$$\hat{\pi}_+^{(0)}(y^*) = \frac{-1}{2\pi i}\int_\gamma (\hat{P}_0^*\hat{P}_0(y^*) - \zeta)^{-1} d\zeta$$

$$\hat{\pi}_-^{(0)}(y^*) = \frac{-1}{2\pi i}\int_\gamma (\hat{P}_0\hat{P}_0^*(y^*) - \zeta)^{-1} d\zeta$$

$$\hat{E}_\pm^{(0)}(y^*) = \hat{\pi}_\pm^{(0)}(y^*)\,\mathcal{S}'_t \subset \mathcal{S}_t.$$

とおく. $\hat{\pi}_+^{(0)}(y^*)$ (resp. $\hat{\pi}_-^{(0)}(y^*)$) は $\mathrm{Ker}\,\hat{P}_0(y^*)$ (resp. $\mathrm{Ker}\,\hat{P}_0^*(y^*) \simeq \mathrm{Coker}\,\hat{P}_0(y^*)$) への射影作用素となることに注意する. また ρ_0 のとり方から $\dim \hat{E}_\pm^{(0)}(y^*)$ は $\omega_{\rho_0}^{\mathbb{C}}$ 上一定 (すなわち $k_\pm$) である.

命題 (4.1) (1) $\exists R_0$ s.t. $\hat{Q}_0 \in \mathcal{O}^{(0)}(\omega_{\rho_0}^c ; \mathcal{L}_{R_0}^m)$

(2). $\hat{E}_+^{(0)}(y^*)$ (resp. $\hat{E}_-^{(0)}(y^*)$) の $L^2(\mathbb{R}_+^d)$ における直交基底 $\{h_{+\ell}^{(0)}(t;y^*)\}_{\ell=1}^{k_+}$ (resp. $\{h_{-\ell}^{(0)}\}_{\ell=1}^{k_-}$) で適当な ρ_0 に対し、

$$h_{\pm\ell}^{(0)}(t;y^*) \in \mathcal{O}^{(0)}(\omega_\rho^c ; H_{\varepsilon_0}), \quad \ell = 1, 2, \cdots, k_\pm$$

となるものがとれる。

証) (1) については Metivier [6] Prop 2.3. (2) については Kato [4] VII, Theorem 3.9 と Melin [5] Appendix をみよ。

この $\{h_{\pm\ell}^{(0)}\}$ から作用素 $\hat{H}_{\pm 0} \in \mathcal{H}_{\varepsilon_0}^\pm$, $\hat{H}_{\pm 0}^* \in {}^*\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^\pm$ を

$$\hat{H}_{\pm 0}(y^*) ; \mathbb{C}^{k_\pm} \ni (z_\ell)_{\ell=1}^{k_\pm} \longmapsto \sum_{\ell=1}^{k_\pm} h_{\pm\ell}^{(0)}(t;y^*) z_\ell \in \mathcal{S}_t$$

$$\hat{H}_{\pm 0}^*(y^*) ; \mathcal{S}_t' \ni u(t) \longmapsto \left(\int \overline{h_{\pm\ell}^{(0)}(t;y^*)}\, u(t)\, dt \right)_{\ell=1}^{k_\pm} \in \mathbb{C}^{k_\pm}$$

で定めると、$\hat{\pi}_\pm^{(0)}(y^*) = \hat{H}_{\pm 0}(y^*) \cdot \hat{H}_{\pm 0}^*(y^*)$ と表わされる。

さらに

$$\hat{M}_0(y^*) = -\hat{H}_{-0}^*(y^*)\, \hat{P}_0(y^*)\, \hat{H}_{+0}(y^*) ;$$

とおけば、

(4.2) $\hat{M}_0 \in \mathcal{O}^{(0)}(\omega_{\rho_0}^c ; \mathfrak{M}(\pm))$

となり 次が成立する.

命題 (4.3) $\forall y^* \in \omega_{P_0}^{\sigma}$ に対し

(1) $$\begin{pmatrix} \hat{Q}_0 & \hat{H}_{+0} \\ \hat{H}_{-0}^* & \hat{M}_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{P}_0 & \hat{H}_{-0} \\ \hat{H}_{+0}^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_{S_+^1} & 0 \\ 0 & Id_{\mathbb{C}^{k_-}} \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} \hat{P}_0 & \hat{H}_{-0} \\ \hat{H}_{+0}^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{Q}_0 & \hat{H}_{+0} \\ \hat{H}_{-0}^* & \hat{M}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_{S_+^1} & 0 \\ 0 & Id_{\mathbb{C}^{k_+}} \end{pmatrix}$$

(証明はレゾルベント方程式を用いて容易にできる Kato [4] p38-39を見よ.)

そこで

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \hat{P} & \hat{H}_{-0} \\ \hat{H}_{+0}^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{P}_0 & \hat{H}_{-0} \\ \hat{H}_{+0}^* & 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{\infty}\begin{pmatrix} \hat{P}_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\equiv \hat{L}_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\hat{L}_j$$

とおき $\hat{L}$ の右パラメトリックス $\hat{E}$ を

$$\hat{E}_0 = \begin{pmatrix} \hat{Q}_0 & \hat{H}_{+0} \\ \hat{H}_{-0}^* & \hat{M}_0 \end{pmatrix}, \quad \hat{E} = \sum_{j=0}^{\infty}\hat{E}_j$$

なる形で構成しよう.

(4.7) の ψ.d.op の symbol 積を # で表わし. $\hat{L}^{(\alpha)} = \partial_\eta^\alpha \hat{L}$

$\hat{E}_{(\alpha)} = D_y^{\alpha}\hat{E}$ なる記法を用いると、

$$\hat{L} \# \hat{E} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Big(\sum_{i+j+2|\alpha|=\ell} \frac{1}{\alpha!} \hat{L}_i^{(\alpha)} \hat{E}_{j(\alpha)} \Big)$$

となるから、$\{\hat{E}_j\}$ を

$$(4.4) \qquad \sum_{i+j+2|\alpha|=\ell} \frac{1}{\alpha!} \hat{L}_i^{(\alpha)} \hat{E}_{j(\alpha)} = 0 , \quad \ell = 1, 2, \cdots$$

がみたされるようにさだめればよい。

(4.4) の左から $\hat{E}_0$ を作用させ、(4.3) の (1) を用いると、$\{E_j\}_{j\ge 1}$ は次式により帰納的に決定される：

$$(4.5) \quad \begin{cases} \hat{E}_1 = -\hat{E}_0\hat{L}_1\hat{E}_0 = \begin{pmatrix} -\hat{Q}_0\hat{P}_1\hat{Q}_0 & -\hat{Q}_0\hat{P}_1\hat{H}_{+0} \\ -\hat{H}^*_0\hat{P}_1\hat{Q}_0 & -\hat{H}^*_0\hat{P}_1\hat{M}_0 \end{pmatrix} \\[2ex] \hat{E}_2 = -\hat{E}_0\hat{L}_2\hat{E}_0 - \hat{E}_0\hat{L}_1\hat{E}_1 - \sum_{j=1}^{n} \hat{E}_0(\partial_{\eta_j}\hat{L}_0)(D_{y_j}\hat{E}_0) \\ \qquad = -\hat{E}_0\hat{L}_2\hat{E}_0 + \hat{E}_0\hat{L}_1\hat{Q}_0\hat{L}_1\hat{E}_0 + i\,\hat{E}_0\langle \nabla_\eta \hat{L}_0, \nabla_y \hat{E}_0\rangle \\ \quad \vdots \\ \hat{E}_\ell = -\Big(\sum_{\substack{i+j+2|\alpha|=\ell \\ j\le \ell-1}} \frac{1}{\alpha!} \hat{E}_0 \hat{L}_i^{(\alpha)} \hat{E}_{j(\alpha)} \Big) \\ \quad \vdots \end{cases}$$

命題(4.6) r は $(2r+1)m \ge d+1$ となる最小の整数とする。
$\hat{E}_j = \begin{pmatrix} \hat{Q}_j & \hat{H}_{+j} \\ \hat{H}_{-j} & \hat{M}_j \end{pmatrix}_{(j\ge 1)}$ を (4.5) により定めると、適当な $\rho_1 > 0$

$\varepsilon_1>0$, $R_1>0$ に対して、次が成立する.

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sigma(\hat{Q}_j)\in FS^{(0)}(\omega_{\rho_1}^{\mathbb{C}};\ G_{R_1}^{\frac{1}{2},(2rm)}),$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sigma(\hat{H}_{\pm,j})\in FS^{(0)}(\omega_{\rho_1}^{\mathbb{C}};\ (H_{\varepsilon_0})^{k_\pm}),$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sigma(\hat{M}_j)\in FS^{(0)}(\omega_{\rho_1}^{\mathbb{C}})\otimes\mathbb{C}^{k_-\times k_+}.$$

(証明の概略は §5 で与える.)

まったく同様にして $\hat{L}$ の左パラメトリックスも構成されるから、$\hat{E}=\sum_{j=0}^{\infty}\hat{E}_j$ は # 積に関して $\hat{L}$ の両側パラメトリックスとなることがわかる.

さて、$\rho_2\in(0,\rho_1)$ に対して、補題 (3.1.3) により

$$q(t,\tau;y,\eta)\in S^{(0)}(\Gamma_{\omega\rho_2};\ G_{R_1}^{\frac{1}{2}(2rm)})$$

$$(h_{\pm\ell}(t;y,\eta))_{\ell=1}^{k_\pm}\in S^{(0)}(\Gamma_{\omega\rho_2};(H_{\varepsilon_1})^{k_\pm})$$

$$(m_{\ell,\ell'}(y,\eta))_{\substack{\ell=1\cdots k_-\\ \ell'=1\cdots k_+}}\in S^{0}(\Gamma_{\omega\rho_2})\otimes\mathbb{C}^{k_-\times k_+}$$

で $q\sim\sum\sigma(\hat{Q}_j)$, $(h_{\pm\ell})_{\ell=1}^{k_\pm}\sim\sum\sigma(\hat{H}_{\pm,j})$, $(m_{\ell\ell'})_{\substack{\ell=1\cdots k_-\\ \ell'=1\cdots k_+}}\sim\sum\sigma(\hat{M}_j)$ in $\Gamma_{\omega\rho_2}$ となるものがとれる.

また、

$$\phi_N(y)\in C_0^{\infty}(|y-\mathring{y}|<\rho_2),\quad \phi_M(t,y)\in C_0^{\infty}(|t|<\rho_2,\ |y-\mathring{y}|<\rho_2)$$

を $\mathring{y}$, $(0,\mathring{y})$ の近傍で $\equiv 1$ となるもの;

$$g_N(\eta) \in C^\infty(\mathbb{R}^n_\eta), \quad \operatorname{supp} g_N \subset \{\eta \in \mathbb{R}^n; |\frac{\eta}{|\eta|} - \mathring{\eta}| < \rho_2\}$$

$$g_M(\tau,\eta) \in C^\infty(\mathbb{R}^{d+n}_{\tau,\eta}), \quad \operatorname{supp} g_M \subset \{(\tau,\eta) \in \mathbb{R}^{d+n}; \frac{|\tau|}{|\eta|} < \rho_2, |\frac{\eta}{|\eta|} - \mathring{\eta}| < \rho_2\}$$

を $\mathring{\eta}$, $(0,\mathring{\eta})$ の錐近傍で $\equiv 1$ となる, 補題 (3.2.1) で与えられる cut off f.t とする。

これらを用いて.

$$Q = \sigma(\hat{Q})(t, D_t; y, D_y)_{\tau(\mathring{y}^*)} \quad \in \mathcal{L}(\mathcal{E}'(M), \mathcal{E}'(M))$$

$$H_\pm = \hat{H}_\pm(t; y, D_y)_{\mathring{y}^*} \quad \in \mathcal{L}((\mathcal{E}'(N))^{k_\pm}, \mathcal{E}'(M))$$

$$M = \hat{M}(y, D_y)_{\mathring{y}^*} \quad \in \mathcal{L}((\mathcal{E}'(N))^{k_+}, (\mathcal{E}'(N))^{k_-})$$

を.

$$Qu(t,y) = \iint e^{it\tau + iy\eta}\, q(t,\tau; y,\eta)\, \phi_M(t,y)\, g_M(\tau,\eta)\, \hat{u}(\tau,\eta)\, \frac{d\tau\, d\eta}{(2\pi)^{d+n}}$$

$$H_\pm v(t,y) = \sum_{\ell=1}^{k_\pm} \int e^{iy\eta}\, h_{\pm\ell}(t; y,\eta)\, \phi_M(t,y)\, g_N(\eta)\, \hat{v}_\ell(\eta)\, \frac{d\eta}{(2\pi)^n}$$

$$(Mv(t,y))_\ell = \sum_{\ell'=1}^{k_+} \int e^{iy\eta}\, m_{\ell\ell'}(y,\eta)\, \phi_N(y)\, g_N(\eta)\, \hat{v}_{\ell'}(\eta)\, \frac{d\eta}{(2\pi)^n}$$

により定める.

また，

$$\underline{P} = \sigma(\hat{P})(t, D_t ; y, D_y)_{\nu(\dot{y}^*)} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}'(M), \mathcal{E}'(M))$$

$$\mathcal{H}_{\pm 0} = \hat{\mathcal{H}}_{\pm 0}(t ; y, D_y)_{\dot{y}^*} \in \mathcal{L}((\mathcal{E}'(N))^{k_\pm}, \mathcal{E}'(M))$$

と同様に定義しておく．すると，これらはすべて，micro local で

$$\begin{pmatrix} \underline{Q} & \underline{H}_+ \\ \underline{H}_-^* & \underline{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{P} & \underline{H}_{-0} \\ \underline{H}_{+0}^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \quad \text{on} \begin{pmatrix} \mathcal{C}^f_{M\,\nu(\dot{y}^*)} \\ (\mathcal{C}^f_{N,\dot{y}^*})^{k_-} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{P} & \underline{H}_{-0} \\ \underline{H}_{+0}^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{Q} & \underline{H}_+ \\ \underline{H}_-^* & \underline{M}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \quad \text{on} \begin{pmatrix} \mathcal{C}^f_{M\,\nu(\dot{y}^*)} \\ (\mathcal{C}^f_{N,\dot{y}^*})^{k_+} \end{pmatrix}$$

となる．すなわち

<u>定理</u>.(4.7)　Q は $\nu(\dot{y}^*)$ の近傍で micro local，$\mathcal{H}_{\pm 0}$ $H_\pm$ は $\dot{y}^*$ の近傍で ν に関し micro local で，次が成立する：

$\forall u \in \mathcal{E}'(M)$ に対し

(1) $\quad Q P u + H_+ H_{+0}^* u \equiv u \qquad \text{mod } \mathcal{A}_{M,\nu(\dot{y}^*)}$

(2) $\quad P Q u + H_{-0} H_-^* u \equiv u \qquad \text{mod } \mathcal{A}_{M,\nu(\dot{y}^*)}$

(3) $\quad \mathcal{H}_-^* P u + M H_{+0}^* u \equiv 0 \qquad \text{mod } (\mathcal{A}_{N,\dot{y}^*})^{k_-}$

$\forall v_+ \in (\mathcal{E}'(N))^{k_+}$ に対し，

(4) $\quad \underline{P} H_+ v_+ + H_{-0} M v_+ \equiv 0 \qquad \text{mod } \mathcal{A}_{M\,\nu(\dot{y}^*)}$

(5) $\quad \mathcal{H}_{+0}^{*} H_{+} v_{+} \equiv v_{+} \qquad \mathrm{mod}\ (A_N \mathfrak{g}^{*})^{k_+}$

$\forall v_{-} \in (\mathcal{E}'(N))^{k_-}$ に対し.

(6) $\quad \mathcal{H}_{-}^{*} H_{-0} v_{-} \equiv v_{-} \qquad \mathrm{mod}\ (A_N \mathfrak{g}^{*})^{k_-}.$

[定理(4.7) ⇒ 定理(2.2)]

(4) は $\mathcal{H}_{+}$ が $\mathrm{Ker}(\underline{M})$ を $\mathrm{Ker}(\underline{P})$ の中にうつすことを示す。
(5) によりこれは単射. (1) によりこれは全射となる.
一方 (3) は $\underline{\mathcal{H}}_{-}^{*}(\mathrm{Rang}(\underline{P})) \subset \mathrm{Rang}(\underline{M})$ を示す. ゆえに $[\underline{\mathcal{H}}_{-}^{*}]$:
$\mathrm{Coker}(\underline{P}) \to \mathrm{Coker}(\underline{M})$ を induce する. (2) よりこれは単射.
(6) よりこれは全射である.

<u>公式</u> (4.8)

$$\hat{M}_0(y^*) = -\hat{H}_{-0}^{*}\hat{P}_0\hat{H}_{+0}$$

$$\sigma(M_0)_{\ell,\ell'} = -\int \overline{h_{-\ell}^{(0)}(t;\bar{y}^*)}\,(\hat{P}_0(y^*)\,h_{+\ell'}^{(0)}(\cdot\,;y^*))(t)\,dt$$

$$\hat{M}_1(y^*) = -\hat{H}_{-0}^{*}\,\hat{P}_1\,\hat{H}_{+0}$$

$$\sigma(M_1)_{\ell\ell'} = -\int \overline{h_{-\ell}^{0}(t;\bar{y}^*)}\,(\hat{P}_0(y^*)\,h_{+\ell'}^{(0)}(\cdot\,;y^*))(t)\,dt.$$

$$\hat{M}_2(y^*) = -\hat{H}_{-0}^{*}\hat{P}_2\hat{H}_{+0} + \hat{H}_{-0}^{*}\hat{P}_1\hat{Q}_0\hat{P}_1\hat{H}_{+0}$$
$$+\, i\,[\hat{H}_{-0}^{*}\langle \nabla_\eta\hat{P}_0, \nabla_y\hat{H}_{-0}\rangle + H_{-0}^{*}\langle \nabla_\eta H_{-0}, \nabla_y M_0\rangle$$
$$+\, M_0\langle \nabla_\eta H_{+0}^{*}, \nabla_\eta \dot{H}_{+0}\rangle]$$

$\vdots$

$$M_j(y^*) = -\hat{H}_{-0}^{*}\,\hat{P}_j\,H_{+0} + F(\hat{P}_0 \cdots \hat{P}_{j-1}, \hat{Q}_0, \hat{H}_{\pm 0}, \hat{M}_0)$$

$\vdots$

§5 命題(4.6)の証明の概略.

r を $(2r+1)m \ge d+1$ ととり. $\hat{A}_0 = (P_0P_0^*+1)^r \in \mathcal{O}^{(0)}(\omega^{\mathbb{C}}_{\rho_0}; A^{(2rm)})$ とおくと Ker $\hat{A}_0(y^{(0)}) = \{0\}$ より $\hat{A}_0^{-1}$ が存在し.

(5.1) $\quad \hat{A}_0^{-1} \in \mathcal{O}^{(0)}(\omega^{\mathbb{C}}_{\rho_0}; \mathcal{L}^{(2rm)}_{R_0}) \quad$ for some $\rho_0, R_0 > 0$

となる. また $\tilde{Q}_0 = \hat{Q}_0\hat{A}_0^{-1}$ とおけば. $\tilde{Q}(\hat{A}_0\hat{P}_0) = 1-\pi_+^{(0)}$, $(\hat{A}_0\hat{P}_0)\tilde{Q}_0 = 1-\pi_-^{(0)}$ となることに注意し Metivier [ ] prop 2.3 を用いると

(5.2) $\quad \tilde{Q}_0 \in \mathcal{O}^{(0)}(\omega^{\mathbb{C}}_{\rho_0}; \mathcal{L}^{(2r+1)m}_{R_0}) \hookrightarrow \mathcal{O}^{(0)}(\omega^{\mathbb{C}}_{\rho_0}; B_{\varepsilon_0})$

for some $\rho_0, R_0, \varepsilon_0 > 0$.

を得る.

<u>定義</u> (5.3) $\varepsilon > 0$ に対し. $\mathcal{E}_\varepsilon$ を次の形の作用素の空間とする:

$$E = \begin{pmatrix} Q & H_+ \\ H_- & M \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{S}'_+ \\ \mathbb{C}^{2p} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \Delta'_+ \\ \mathbb{C}^{2p} \end{pmatrix}$$

s.t. $\quad Q \in B_\varepsilon$, $H_\pm \in \mathcal{H}^\pm_\varepsilon$, $M \in \mathfrak{m}(\pm)$, また.

$$\|E\|_{\mathcal{E}_\varepsilon} \equiv \max\{\|Q\|_{B_\varepsilon}, \|H_\pm\|_{\mathcal{H}^\pm_\varepsilon}, \|M\|_{\mathfrak{m}(\pm)}\}$$

とする.

さて, $\tilde{\tilde{E}}_j = \hat{E}_j \begin{pmatrix} \hat{A}_0^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Q}_j\hat{A}_0^{-1} & \hat{H}_{+j} \\ \hat{H}^*_j\hat{A}_0^{-1} & \hat{M}_j \end{pmatrix}$ とおくと.

補題 (3.3.4), (3.3.7), (3.3.9), (3.3.11), と Cauchy の不等式を用いることにより, 次が示される.

命題 (5.4) $\rho_0>0$ $\varepsilon_0>0$ $C>0$ が存在し, $\forall\rho\in(0,\rho_0)$ に対し次が成立：

$$\sup_{y^*\in\omega_\rho^{\mathbb{C}}}\|\tilde{E}_j\|_{\mathcal{E}_{\varepsilon_0}}\le C\left(\frac{Cj}{\rho_0-\rho}\right)^{j/2}\qquad j=0,1,2,\cdots.$$

$\tilde{E}_j=\begin{pmatrix}\tilde{Q}_j & \tilde{H}_{+j}\\ \tilde{H}_{-j} & \tilde{M}_j\end{pmatrix}$ と書けば 命題 (5.4) は $\forall\rho\in(0,\rho_0)$ に対し

- $\sum\tilde{Q}_j\in FS^{(0)}(\omega_\rho^{\mathbb{C}};B_{\varepsilon_0})\overset{\sigma}{\hookrightarrow}FS^{(0)}(\omega_\rho^{\mathbb{C}};G_R^{\frac{1}{2}(0)})$ $(R=R(\varepsilon_0))$
- $\sum\hat{H}_\pm\in FS^{(0)}(\omega_\rho^{\mathbb{C}};\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{\pm})\overset{\sigma}{\hookrightarrow}FS^{(0)}(\omega_\rho^{\mathbb{C}};(H_{\varepsilon_0})^{k\pm})$
- $\sum\tilde{M}\in FS^{(0)}(\omega_\rho^{\mathbb{C}};m(\pm))\overset{\sigma}{\hookrightarrow}FS^{0}(\omega_\rho^{\mathbb{C}})\otimes\mathbb{C}^{k-\times k+}$

と意味する.

$\sigma(\hat{A}_0)=a_0(t,\tau;y,\eta)$, $\sigma(\hat{A}_0^*)=a_0^*(t,\tau;y,\eta)$ と表わし.

$$q_j(t,\tau;y,\eta)=\sum_{|\alpha|\le 2rm}\frac{1}{\alpha!}(\partial_\tau^\alpha\sigma(\tilde{Q}_j))(t,\tau;y,\eta)(D_t^\alpha a_0)(t,\tau;y,\eta)$$

$$h_-^{(j)}(t;y,\eta)=\sum_{|\alpha|\le 2rm}\frac{1}{\alpha!}(\partial_\tau^\alpha a_0^*)(t,0;y,\eta)(D_t\sigma(\tilde{H}_-))(t;y,\eta)$$

$$h_+^{(j)}(t;y,\eta)=\sigma(\tilde{H}_+)(t;y,\eta),\quad (m_{\ell\ell'}^{(j)})=\sigma(\tilde{M}_j)$$

とおけば. これらが $\hat{Q}_j,\hat{H}_{\pm j},\hat{M}_j$ の symbol を与え、補題 (3.3.12) と (3.3.15) により 命題 (4.6) が証明される。

§6. 例

まず、$k=0,1,2,\cdots$ に対し

$$\psi_k(t) = (2^k k!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}\left(t-\frac{d}{dt}\right)^k e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

とおく，

$$\left(-\left(\frac{d}{dt}\right)^2 + t^2\right)\psi_k(t) = (2k+1)\psi_k(t)$$

$$(\psi_\ell(t),\psi_k(t))_{L^2} = \delta_{\ell,k}$$

である．また

$$(\psi_\ell(t), t\psi_k(t))_{L^2} = \sqrt{\frac{k+1}{2}}\,\delta_{\ell,k+1} + \sqrt{\frac{k}{2}}\,\delta_{\ell,k-1}$$

$$(\psi_\ell(t), t^2\psi_k(t))_{L^2} = \left(k+\frac{1}{2}\right)\delta_{\ell,k} + \frac{\sqrt{(k+1)(k+2)}}{2}\,\delta_{\ell,k+2} + \frac{\sqrt{k(k-1)}}{2}\,\delta_{\ell,k-2}$$

にも注意しておく．

<u>例</u> (6.1)

$$P(k) = D_y^{-1}\left\{\sum_{j=1}^{d}(D_{t_j}^2 + t_j^2) - (d+2k)D_y\right\} \quad \text{at } (0,0;dy)\in T^*(\mathbb{R}^{d+1}_{t,y})$$

を考える．$\hat{t}_j = t_j|\eta|^{\frac{1}{2}}$，$\hat{D}_j = |\eta|^{-\frac{1}{2}}D_{t_j}$ と書くと．

$$\hat{P}(k) = \hat{P}_0 = |\hat{D}|^2 + |\hat{t}|^2 - (d+2k)$$

である．また上の $\psi_k(t)$ を用いて．$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)\in\mathbb{N}^d$ に対し

$$\hat{h}_\alpha(t;\eta) = |\eta|^{\frac{d}{4}}\prod_{j=1}^{d}\psi_{\alpha_j}(\hat{t}_j)$$

とおき，

$$|\hat{h}_\alpha\rangle : \mathbb{C} \ni z \longmapsto z\hat{h}_\alpha(t;\eta) \in \mathcal{S}_t$$
$$\langle\hat{h}_\alpha| : \mathcal{S}'_t \ni u(t) \longmapsto (\hat{h}_\alpha(t;\eta), u(t))_{L^2(\mathbb{R}^d_t)} \in \mathbb{C}$$

と書くと（Dirac 記法）

$$\hat{Q}(k) = \sum_{|\alpha| \neq k} \frac{1}{2(|\alpha| - k)} |\hat{h}_\alpha\rangle\langle\hat{h}_\alpha|$$

$$\hat{H}_+(k) = \hat{H}_-(k) = \bigoplus_{|\alpha| = k} |\hat{h}_\alpha\rangle : \mathbb{C}^{\#\{|\alpha|=k\}} \to \mathcal{S}_t$$

で与えられ， $\hat{M} = -\langle\hat{h}_{\alpha_2}|\hat{P}_0|\hat{h}_{\alpha_1}\rangle_{|\alpha_1|=|\alpha_2|=k} = (0)$

となる．

よって，

$$H(k) = \bigoplus_{|\alpha|=k} \hat{h}_\alpha(t;D_y) : (\mathcal{E}'(\mathbb{R}_y))^{\#\{|\alpha|=k\}} \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d+1}_{t,y})$$

が同型

$$(\mathcal{C}^f_{\mathbb{R},(0,dy)})^{\#\{|\alpha|=k\}} \simeq \mathrm{Ker}(P(k) : \mathcal{C}^f_{\mathbb{R}^{d+1},(0,0;dy)} \to \mathcal{C}^f_{\mathbb{R}^{d+1},(0,0;dy)})$$

$$(\mathcal{C}^f_{\mathbb{R},(0;dy)})^{\#\{|\alpha|=k\}} \simeq \mathrm{Coker}(P(k) : \mathcal{C}^f_{\mathbb{R}^{d+1},(0,0;dy)} \to \mathcal{C}^f_{\mathbb{R}^{d+1},(0,0;dy)})$$

を与える．（ $\#\{|\alpha|=k\} = \binom{d+k-1}{k}$ ）

例 (6.2)（$P(0)$ からの摂動計算）

$$P = P(0) + D_y^{-1}\{\sum_{i \leq j} a_{ij} t_i t_j D_y + \sum_{j=1}^{d}(b_j D_{t_j} + b'_j t_j D_y) + c\}$$

at $(0,0;dy)$．を考える．

$$\hat{P}(\eta) = \hat{P}_0 + \hat{P}_1 + \hat{P}_2$$

$$= (|\hat{D}|^2 + |\hat{t}|^2 - d) + |\eta|^{-\frac{1}{2}} \sum (b_j \hat{D} + b'_j \hat{t}_j) + |\eta|^{-1} \Big(\sum_{i \le j} a_{ij} \hat{t}_i \hat{t}_j + c \Big)$$

$$\hat{Q}_0(\eta) = \sum_{|\alpha| \ne 0} \frac{1}{2|\alpha|} |\hat{h}_\alpha\rangle\langle \hat{h}_\alpha|$$

$$\hat{H}_0(\eta) = \hat{H}_{-0}(\eta) = |\hat{h}_{(0)}\rangle \qquad ((0) = (0, \cdots, 0))$$

である。 よって

$$\hat{M}_0(\eta) = -\langle \hat{h}_{(0)} | \hat{P}_0 | \hat{h}_{(0)} \rangle = 0$$

$$\hat{M}_1(\eta) = -\langle \hat{h}_{(0)} | \hat{P}_1 | \hat{h}_{(0)} \rangle = 0$$

$$|\eta| \hat{M}_2(\eta) = -\langle \hat{h}_{(0)} | |\eta| \hat{P}_1 | \hat{h}_{(0)} \rangle + \langle \hat{h}_{(0)} | |\eta| \hat{P}_1 \hat{Q}_0 \hat{P}_1 | \hat{h}_{(0)} \rangle$$

$$= -\sum_{i \le j} \langle \hat{h}_{(0)} | a_{ij} \hat{t}_i \hat{t}_j + c | \hat{h}_{(0)} \rangle$$

$$+ \sum_{i,j} \Big(\sum_{|\alpha| \ne 0} \frac{1}{2|\alpha|} \langle \hat{h}_{(0)} | b_i \hat{D}_i + b'_i \hat{t}_i | \hat{h}_\alpha \rangle \langle \hat{h}_\alpha | b_j \hat{D}_j + b'_j \hat{t}_j | \hat{h}_{(0)} \rangle$$

ここで

$$\langle \hat{h}_{(0)} | \hat{t}_i \hat{t}_j | \hat{h}_{(0)} \rangle = \frac{1}{2} \delta_{i,j}$$

$$(b_j \hat{D}_j + b'_j \hat{t}_j) | \hat{h}_{(0)} \rangle$$

$$= \Big(\frac{1}{2}(b'_j + i b_j)(\hat{t}_j - i \hat{D}_j) + \frac{1}{2}(b'_j - i b_j)(\hat{t}_j + i \hat{D}_j) \Big) | \hat{h}_{(0)} \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (b'_j + i b_j) | \hat{h}_{(j)} \rangle \qquad ((j) = (0 \cdots \overset{j}{1} \cdots 0))$$

等を用いると

$$|\eta| \hat{M}_2 = -\Big(c + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} a_{jj}\Big) + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{d} (b_j^2 + b'^2_j)$$

故に $\sum_{j=1}^{d}(b_j^2+b_j'^2-2a_{jj})-4e\neq 0$

$\Longrightarrow$ P は $(0.0;dy)$ で A-m.h.e

必要なら さらに高次の項も計算可能

例えば： $b_j = b_j' = 0 \cdot (\forall j)$, $e=0$ の場合.

$\hat{M}_0 = \hat{M}_1 = \hat{M}_2 = \hat{M}_3 = 0$

$$|\eta|^2 \hat{M}_4 = |\eta|^2 \langle \hat{h}_{(0)} | \hat{P}_2 \hat{Q}_0 \hat{P}_2 | \hat{h}_{(0)} \rangle$$

$$= \sum_{i<j} a_{ij}^2 \frac{|\langle \hat{h}_{(i,j)} | \hat{t}_i \hat{t}_j | h_{(0)} \rangle|^2}{4}$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} a_{jj}^2 \frac{|\langle \hat{h}_{2(j)} | \hat{t}_j^2 | \hat{h}_{(0)} \rangle|^2}{4} \qquad \left(\begin{matrix} (i,j) = (0 \cdots \overset{i}{1} \cdots \overset{j}{1} \cdots 0) \\ 2(j) = (0, \cdots \overset{j}{2} \cdots 0) \end{matrix} \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\sum_{i<j} a_{ij}^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} a_{jj}^2 \right).$$

例(6.3) （ $P(2)$ $(d=2)$ からの摂動計算).

$$\underline{P} = D_y^{-1}\{ D_{t_1}^2 + D_{t_2}^2 - (t_1^2+t_2^2)D_y^2 - 6D_y + (a_1t_1^2 + a_2t_2^2 + 2bt_1t_2)D_y \}$$

at $(0;dy) \in T^*(\mathbb{R}^3_{t,y})$, を考える.

$$\hat{P} = \hat{P}_0 + \hat{P}_2 = (|\hat{D}|^2 + |\hat{t}|^2 - 6) + |\eta|^{-1}(a_1\hat{t}_1^2 + a_2\hat{t}_2^2 + 2b\hat{t}_1\hat{t}_2)$$

$$\hat{H}_{+0} = \hat{H}_{-0} = \bigoplus_{|\alpha|=2} |\hat{h}_\alpha\rangle = (\hat{h}_{(2,0)}, \hat{h}_{(1,1)}, \hat{h}_{(0,2)}) : \mathbb{C}^3 \to \mathcal{S}_t.$$

$\therefore$ $\hat{M}_0 = \hat{M}_1 = 0$

$$|\eta|\hat{M}_2(\eta) = -\sum_{j=1}^{2} a_j \langle \hat{h}_{\alpha_1}|\hat{t}_j^2|\hat{h}_{\alpha_2}\rangle - 2b\langle \hat{h}_{\alpha_1}|\hat{t}_1\hat{t}_2|\hat{h}_{\alpha_2}\rangle \qquad (|\alpha_1|=|\alpha_2|=2)$$

$$= -a_1\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - a_2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} - 2b\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

となる.

$$\det(|\eta|\hat{M}_2) = -\frac{3}{8}(a_1+a_2)(5a_1+a_2)(a_1+5a_2) + 6(a_1+a_2)b^2$$

だから、次の十分条件を得る:

$a_1+a_2 \neq 0$, かつ $5(a_1+a_2)^2 + 16(a_1a_2 - b^2) \neq 0$

$\Longrightarrow$ P は $(0, dy)$ で A-m.h.e

以下は結果のみを書く.

例 (6.4) $P = D_{y_2}^{-1}\{D_t^2 + t^2 D_{y_2}^2 - (1+iy_1)D_{y_2} - D_{y_1}\}$ at $(0; dy_2)$

$$\hat{H}_{+0} = \hat{H}_{-0} = \left(\frac{\eta_2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{t^2}{2}\eta_2} \qquad (\eta_2 > 0)$$

$$\hat{M} = \hat{M}_0 + \hat{M}_2 + \cdots, \quad \hat{M}_0 = \eta_2^{-1}(\eta_1 + iy_1\eta_2)$$

よって

(1) P は $(0, dy_2)$ で A-m.h.e.

(2) $\mathrm{Coker}(P) \simeq \mathrm{Coker}(M) \simeq \mathcal{C}^f_{\mathbb{R}_{y_2},(0,dy_2)}$

例 (6.5) $P = D_{y_2}^{-1}\{D_t^2 + t^2|D_y|^2 - (1-\frac{1}{2}y_1^2)D_{y_2} - e\}$ at $(0; dy_2)$

$$\hat{H}_{+0} = \hat{H}_{-0} = \left(\frac{|\eta|}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{t^2}{2}|\eta|}$$

$$\hat{M}_0 = -\eta_2^{-1}(|\eta| - \eta_2) - \frac{1}{2}y_1^2 = -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 - y_1^2\right) + O\left(\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^4\right)$$

$$\hat{M}_1 = 0$$
$$\hat{M}_2 = -\eta_2^{-1}\left(c + O\left(y_1^2 + \left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2\right)\right)$$
$$\vdots$$

すなわち. $\hat{M}(\eta) \fallingdotseq -\frac{1}{2}\eta_2^{-2}\left(\eta_1^2 + y_1^2\eta_2^2 - 2c\eta_2\right)$

ゆえに

$c \notin \{j+\frac{1}{2} ; j=0,1,2,\cdots\} \Rightarrow P$ は $(0, dy_2)$ で A-m.h.e.

文献

[1] Grigis, A. - Rothschild, L. : Ann. Math 118(1983) 443-460

[2] Grušin, V.V. : Math. USSR Sb. 13(1971) 155-185

[3] Kashiwara, M. - Kawai, T. - Oshima, T. : Proc. Japan Acad. 50(1974) 549-550

[4] Kato, T. : Perturbation Theory for Linear Operators (Springer)

[5] Melin, A. : Comm. P.D.E. 6(1981) 1363-1405

[6] Métivier, G : Comm. P.D.E. 6(1981) 1-90

[7] Ōkaji, T. : J. Math. Kyoto Univ. 25(1985) 489-514

[8] Stein, E.M. : Inv. Math 69(1982) 209-216